# 二種類のランジュバン方程式と巨視的物理法則

阪大・教養　植山　宏

（6月6日受理）

## 1. 序

非可逆過程論に於るLangevin Eq. の重要性は古くから指摘され，[1)〜4)] 多くの物理的・数学的研究が為されて来たが，未だに対応するFokker-Planck Eq. と現象論的方程式（巨視的物理法則）の形はどうなるのかという基本的な問題が，少くとも非線形の場合には，未解決である。[2)]

最近の微視的力学より演繹されたLangevin Eq. の一般論[5)]の立場よりこの問題を考え，従来Langevin Eq. と呼ばれて来たものを二種類に区別する事によって系統的に理解できる事を示す。

## 2. M. Lax等の理論[6)]

非線形Langevin Eq.

$$da/dt = B(a) + \sigma(a)\, f(t) \tag{2.1}$$

〔但し，f(t)はGaussian random variableであって

$$< f(t) > = 0, \qquad < f(t)\, f(u) > = 2\delta\,(t-u) \tag{2.2}$$

とする〕を考える。一般に，[7)] 確率変数 a に対するFokker-Planck Eq.

$$\frac{\partial}{\partial t} P(a,t) = -\frac{\partial}{\partial a} A(a)\, P(a,t) + \frac{\partial^2}{\partial a^2} D(a)\, P(a,t) \tag{2.3}$$

は，

$$A(a) = \lim_{\Delta t \to 0} < \{ a(t+\Delta t) - a(t) \} > / \Delta t \tag{2.4}$$

$$D(a) = \lim_{\Delta t \to 0} < \{ a(t+\Delta t) - a(t) \}^2 > / \Delta t \tag{2.5}$$

によって与えられる。Lax によれば，（2.1)式は積分方程式

$$a(t+\Delta t)-a(t)=\int_t^{t+\Delta t}\{B(a(s))+\sigma(a(s))\ f(s)\}\,ds \tag{2.6}$$

と同等であるので，逐次近似法によって

$$\Delta a \cong B(a)\Delta t+\sigma(a)\int_t^{t+\Delta t} f(s)\,ds + \sigma(a)\partial\sigma/\partial a\cdot\int_t^{t+\Delta t}ds\int_t^s du\, f(s)\, f(u) \tag{2.7}$$

と求まる。結局

$$A(a)=B(a)+\sigma\partial\sigma/\partial a \tag{2.8}$$

$$D(a)=[\sigma(a)]^2 \tag{2.9}$$

となる。

こゝで問題とするのは，（2.8）式の第二項である。この項を“Dynamical Friction”と呼んでおこう[8]。

K. Itô[9] や，J.L.Doob[10] といった数学者の Brown 運動の理論では，（2.1）式は

$$\Delta a = B(a)\Delta t + \sigma(a)f(t)\Delta t \tag{2.10}$$

と同等であって[10]，（2.8）の第二項は生じない。この相異は（2.1）式に於る時間微分の意味の相異，従って又，（2.6）式の積分の意味の相異に由来する。即ち，（2.6）を通常の Stieltjes 積分と考えれば，（2.1）は ordinary diff. eq. となり，この時 drift velocity A(a) は（2.8）で与えられる。しかし，（2.6）を確率積分と考えれば，（2.1）は確率微分方程式（stochastic diff. eq.）となって（2.8）の第二項のない結果 $A(a)=B(a)$ が得られる。

即ち，“Dynamical Friction”〔（2.8）の第二項〕が表れたのは，Lax が（2.1）の時間微分が ordinary diff. であると『選択』した為である。彼は，こう「選択」した理由をこう述べている：　通常数学者達は，（2.1）式の f(t) は Brown 運動過程と仮定するが，この過程は理想化されすぎている。物理的に云うと，乱雑力の相関函数は $\delta$ 函数ではなくて，小さくとも有限の相関時間 $\tau_c$ がある筈である。$\tau_c$ より小さい時間間隔をとって考えれば Stieltjes 積分は定義できて，（2.6）～（2.7）の演算は可能である。最後に $\tau_c\to 0$ の極限をとれば Brown 運動が得られる。

この議論は本当だろうか。有限の時間間隔 $\tau$ を設定し，極限 $\tau\to 0$ で力学過程[11]が確率過程になるという議論は，基本的には Einstein[12]の拡散方程式の導出にはじまるものであるが，何か結果が逆になっている様にも思える。いずれにせよ，問題は単なる数学の問題ではなく物理の問題である。次に力学に基く非線形 Langevin Eq.[5]についてこの問題を考えよう。

## 3. 物理的非線形 Langevin 方程式

上記論文[5]に於ては，厳密な巨視変数の理論[13),14]を援用する事によって物理的な非線形 Langevin Eq. が導出された。この理論を master eq.

$$\frac{\partial}{\partial t}P(a,t)=\int da'\{w(a,a')-w(a',a)\}P(a',t) \tag{3.1}$$

又は，同等な一般化 Fokker-Planck Eq.

$$\frac{\partial}{\partial t}P(a,t)=\{-\frac{\partial}{\partial a}\alpha_1(a)+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial a^2}\alpha_2(a)+\cdots\}P(a,t) \tag{3.2}$$

$$\alpha_n(a)\equiv\int(a'-a)^n w(a',a)\,da' \tag{3.3}$$

の成立する領域 (kinetic stage) で整理すると次の様である。

巨視的物理法則は

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{a}=\alpha_1(\bar{a}) \tag{3.4}$$

で与えられ (van Kampen[14),15])，Langevin eq. は

$$\frac{\partial}{\partial t}a=\alpha_1(a)+R(t) \tag{3.5}$$

$$<R(0)R(t)>=-a\alpha_1(a)\delta(t) \tag{5.6}$$

で与えられる。但し，(3.6) では詳細釣合の仮定を使う。

即ち，(3.4) 式は，(3.5) 式より求まるべき drift velocity A(a) が

$$A(a) = \alpha_1(a) \tag{3.7}$$

である事を示している。この事は又，（3.2）式と（3.5）式との比較よりも云える。前節の議論によれば，この事は，（3.5）式が Itô，Doob 等の意味での確率微分方程式である事を示している。今まで数学者の専売特許であった確率微分が正しく物理法則を表していた事が分った。

しかし，問題が残る。（3.5）式は，（ある時間領域で）運動方程式と同等であり[5]，運動方程式は通常の微分方程式である。運動方程式は有限の系について立てられており，Langevin Eq.（3.5）は熱力学的極限での方程式として与えられている点に注意を要する。この熱力学的極限をとるということは Lax や Einstein の議論にある $\tau \to 0$ の極限操作に対応する。Laxも引用している数学者の論文[16]に於て，ある種の極限で通常の微分方程式が確率微分方程式に推移する事が論じられている。即ち，Brown 運動過程 $y(t)$ によって与えられた確率微分方程式

$$dx(t) = m(x(t), t)\,dt + \sigma(x(t), t)\,dy(t) \tag{3.8}$$

を考えるのに，$n \to \infty$ で $y(t)$ に収束する様な区分的に微分可能で，有界変動の函数 $y_n(t)$ で置換した通常の微分方程式

$$dx_n(t) = m(x_n(t), t)\,dt + \sigma(x_n(t), t)\,dy_n(t) \tag{3.9}$$

を設定する。すると，この解 $x_n(t)$は $n \to \infty$ で（3.8）の解ではなく，別の確率微分方程式

$$\begin{aligned} dx(t) = m(x(t), t) + \frac{1}{2}\sigma(x(t), t)\,[\partial\sigma(x(t), t)/\partial x]\,dt \\ + \sigma(x(t), t)\,dy(t) \end{aligned} \tag{3.10}$$

の解に収束する。これによって通常の微分方程式（3.9）と「対応する」確率微分方程式（3.10）の関係は明らかである。（3.10）式の右辺第二項が問題の dynamical friction である。

## 4. 例題〔古典スピン〕

前節の理論の演習として古典スピンの問題を考える[17]。即ち，運動方程式

$$\frac{d}{dt}\mathbf{M} = \gamma \mathbf{H}_0 \times \mathbf{M} + \gamma \mathbf{h}(t) \times \mathbf{M} \qquad (4.1)$$

に従うベクトル量 $\mathbf{M}$ について，“Bloch Eq.”を導こう。こゝに，$\mathbf{h}(t)$ は熱浴との相互作用を磁場の形で表したものである。

前節の理論の出発点はHamiltonianである。(4.1)式に対応するHamiltonianとして

$$\mathscr{H} = \mathbf{H}_0\mathbf{L} + \mathbf{h}(Y)\cdot\mathbf{L} + \mathscr{H}_Y \qquad (4.2)$$

$$\mathbf{L} = -i\mathbf{M} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{M}} \qquad (4.3)$$

を考えれば，Heisenberg Eq.

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{M} = i\,\{\mathscr{H}\mathbf{M} - \mathbf{M}\mathscr{H}\} \qquad (4.4)$$

は正しく(4.1)を再現する。但し，Yは熱浴の自由度を表す。これより，“Bloch Eq.”

$$\frac{d}{\partial t}M_j = \gamma\,(H_0 \times M)_j - M_j/T_j \qquad (4.5)$$

及び，それに伴うLangevin Eq.

$$\frac{d}{\partial t}M_j = \gamma\,(H_0 \times M)_j - M_j/T_j + R_j(t) \qquad (4.6)$$

を導くのは容易である。“Bloch Eq.”は $(M_z - \langle M_z \rangle)/T_1$ の項が $M_z/T_1$ になっているBloch Eq.である。

さて，この問題はLax[18]，Kubo[19),20]によっても論じられている。彼らの方法は，(4.1)式の右辺の $\mathbf{h}(t)$ を統計的性格の与えられた確率変数であると考える。即ち，運動方程式(4.1)を“Langevin Eq.”と見做す方法である。一般的方法はStochastic Liouville Eq.の方法[4),21]として定式化されている。この結果，“Bloch Eq.”(4.5)と共に $M_j$ に対するFokker-Planck Eq. が導かれる。

我々は二種類のLangevin Eq. (4.1)と(4.6) を有する。

5.　二種類のLangevin Eq.

今までLangevin Eq.と呼びならわされて来たものに二種類ある事が明らかとなった。古典スピンの例では（4.1）と（4.6）であり，数学的には（3.9）と（3.10）である。第二の例をLaxの非線形Langevin Eq.（2.1）に関して云えば，通常の微分方程式（2.1）に"対応して"確率微分方程式

$$da/dt = B'(a) + \sigma(a)\,f(t) \tag{5.1}$$

$$B'(a) = B(a) + \sigma\,\partial\sigma/\partial\sigma \tag{5.2}$$

が考えられる。（2.1）と（5.1）の関係が，丁度（4.1）と（4.6）の関係に対応するのは明らかである。よって，今仮りに，（2.1），（4.1）をType O（Ordinary diff. eq.）のLangevin Eq.（4.6），（5.1）をType S（Stochastic diff. eq.）と呼ぶ事にする。Type Oは運動方程式であり，Type Sは現象論に密着している。Type Sでは，Dynamical Friction $\sigma\partial\sigma/\partial a$は既に減衰項の中に入って居り，従って，（2.7）式の如き計算は行わない。

では，当初Langevin[22]の提出した方程式

$$\frac{d}{dt}u = -\gamma u + R(t) \tag{5.3}$$

はどちらであろうか？こゝで，uは粒子の速度であり，一面に於てNewtonの運動方程式と考えられ，他面，経験的な減衰常数$\gamma$を含んでいる。即ち，一面に於てType O（＝運動方程式）であり，他面，Type S（＝経験的，即ち，現象論的）である。この矛盾した性格は，"解" u(t)が時間微分不可能という数学的矛盾となって表れOrnsteinとUhlenbeck[7), 23)]やDoob[10)]達を刺戟し，自己無撞着な体系（確率過程論）を作らしめた。この様な自己無撞着な体系は，物理的には運動方程式とは別の水準（kinetic stage）に於る現象論である可能性を持った体系であり，事実その通りである事が分った[5)]。現在の立場では，（5.3）はType Sである。

上述の如く，Langevin Eq.は対になっているものと考えられる。では，（5.3）式に"対応する"Type Oの方程式はどうであろうか。（5.2）式で，$B'(a) = -\gamma a$としてB(a), $\sigma(a)$を決定する問題であるが，これだけでは一意的でない。普通には，

$$B(a) = -\gamma a, \qquad \sigma(a) = \text{const}. \tag{5.4}$$

と考えられている様であるが,[2),4)] Type O の方程式は運動方程式であるという観点からみると具合が悪い。運動方程式には散逸項は含まれるべきでない。又,数学的な困難もある。揺動散逸定理[1),4),5)]とか Einstein の関係[12)]

$$D = \gamma \langle a^2 \rangle \tag{5.5}$$

の見地よりすれば,減衰項はすべてDynamical Friction によるべきである。従って,

$$B(a) = 0, \qquad \sigma(a) = \sqrt{\gamma}\, a \tag{5.6}$$

が考えられる。しかも,こゝで困った事は符号が合わない。

前節の古典スピンの例を考えよう。

(4.6)式で$\mathbf{H}_0 = 0$ とおけば,線形 Langevin Eq. に他ならない。これに対する Type O の式は(4.1)式で($H_0 = 0$ としたもの)であって,三成分の混った一寸した複雑さが,丁度上記の困難を救っている。

この事より, Type O の式として(2.1)式とか(3,9)式とかを考えるのは理想化しすぎであって,現実には(物理的且つ数学的に)Type O としては(4.1)式程度には複雑な運動方程式を考えなければならない事が明らかであろう。

今まで断りなしに"Dynamical Friction"と云って来たが符号が違っていた。もう少し,正確に Dynamical Friction を論じよう。

## 6. Dynamical Friction[8)]

Chandrasekhar は von Neumann との共著による天体運動の統計的研究[24)]で,粘性媒質中の Stokes friction といったものとは異る減衰機構を発見し Dynamical Friction と呼んだ。彼は更に,統計力学の一般論として定式化することを試み,[25)] 多粒子系にある確率論的な仮定を導入すれば Dynamical Friction が導かれることを示した。

Chandrasekhar の研究は Kirkwood,[26)] M.S.Green[3)] に受継がれた。又, Kubo の Stochastic Liouville Eq. の方法[21)]もこの研究の直接的な発展と考えられる。又, Mori の generalized Langevin Eq. の方法[28)]も又, Zwanzig[29)]等を通してこの研究の影響下にあるものと思われる。

これらの研究に特徴的な事は,運動方程式を Langevin Eq. と見做す点である。Kirkwood[26)] に明確に述べられている様に運動方程式

$$\frac{d}{dt} u = \frac{1}{m} F \tag{6.1}$$

の右辺を systematic part $\langle F\rangle = -\gamma u$ と random force $R(t) = F(t) - \langle F(t)\rangle$ に分割することによって Langevin Eq. が得られるという考えである。この分割が自明である場合は簡単であり，直接 Stochastic Liouville Eq. が導かれる。

古典スピンの例では，Hamiltonian（4.2）によって定義される Liouville Eq. に於て，熱浴の自由度まで含めた完全な方程式の代りに，$\mathbf{h}(t)$ を与えられた相関函数によって規定される確率変数とみる事も「近似的には」可能である。しかし，この様な場合ですら力学過程と Markov 過程は全く別の過程であるので，[11] 正しい結果を得る為には十分の注意が必要である。云うまでもなく，現在の我々の観点よりすれば，上述の考えは Type O と Type S を混同している。

更に，M.S. Green[3] は Kirkwood の考えを発展させ，直接力 $F(t)$ を分割する代りに，Fokker-Planck Eq.（2.3）の導出に於て Langevin Eq.（2.1）の為した役割を未分割のまゝの運動方程式（6.1）に荷わせる様工夫した。又，巨視変数の概念の重要性を指摘した。即ち，巨視変数 $a_j(X_t)$〔$X_t$ は $\Gamma$ 空間の点〕の運動方程式

$$\frac{d}{dt} a_j(X_t) = v_j(X_t) \tag{6.2}$$

の右辺を何かの確率変数と見做して，（2.4），（2.5）を用いて Fokker-Planck Eq. を導く。

$$A_j(a)\,\Delta t = \langle \Delta a_j\rangle \tag{6.3}$$

と書けば，

$$\langle \Delta a_j\rangle = \int_0^{\Delta t} d\tau \int v_j(X_\tau)\, E(X;\{a_k\})\, dX / w(\{a_k\}) \tag{6.4}$$

となる。こゝに，$E(X;\{a_k\})$ は $a_k(X) = a_k$ 等で指定される超曲面（物理的には薄い殻）の定義函数で $w(\{a_k\})$ はその体積である。積分は，任意函数 $\varphi(a(X)) \equiv \varphi(\{a_k(X)\})$ を用いて行われる。

$$\int_0^{\Delta t} d\tau \int v_i(X_\tau)\,\varphi(A(X))\, dX = \int \langle \Delta a_i\rangle \varphi(A)\, w(A)\, dA \tag{6.5}$$

$$= \int_0^{\Delta t} d\tau \int v_i(Y)\,\varphi(A(Y_{-\tau}))\, dY \tag{6.6}$$

に於て，展開

$$\varphi(A(Y_{-\tau})) = \varphi(A(Y)) - \sum_k \int_{-\tau}^{0} v_k(\sigma) \frac{\partial}{\partial a_k} \varphi(A(Y))\, d\sigma + \cdots \tag{6.7}$$

を用いて

$$(6.6) = \int_0^{\Delta t} d\tau < v_i > \varphi(A)\, w(A)\, dA$$

$$- \sum_k \int_0^{\Delta t} d\tau \int_{-\tau}^{0} d\sigma < v_i v_k(\sigma) > \frac{\partial \varphi(A)}{\partial a_k} w(A)\, dA \tag{6.8}$$

と変形し，最後に部分積分を行って，結局

$$\frac{d}{dt} < a_j > = < v_j > + \sum_k \{ \xi_{jk}(a) \frac{\partial}{\partial a_k} \log w(a) - \frac{\partial}{\partial a_k} \xi_{jk}(a) \} \tag{6.9}$$

$$\xi_{jk}(a) \equiv \int d\sigma < v_j v_k(a) > \tag{6.10}$$

を得ている。

(2.7)式と(6.7)～(6.8)式の対応は明らかである。従って，(6.9) の右辺第二項がDynamical Friction を表している。

我々の二種類のLangevin Eq. という観点よりすれば，以上の理論はType O の方程式(6.2)より，(6.9)の右辺に更に random forceを付加して得られるType S の方程式を導く理論と見做す事が出来る。事実，Green の理論を一部精密化したZwanzigの理論[29] を論文[5] の手法を参照して，直接この様なType S の方程式を導出する事は容易である。即ち

$$\frac{d}{dt} a_j = v_j + \alpha_{1j}(a) + R_j(t) \tag{6.11}$$

$$\alpha_{1j}(a) \cong \sum_k \{ \xi_{jk}(a) \frac{\partial}{\partial a_k} \log w(a) - \frac{\partial}{\partial a_k} \xi_{jk}(a) \} \tag{6.12}$$

がType S の方程式として一応得られる。

こゝに於て，物理的非線形Langevin Eq. ( 3節の理論[5]) とDynamical Frictionの関係が明白となった。

Dynamical Friction の理論及びその展開においては，Type O の観点に立って　運動方程式＝Langevin Eq. という関係が発見法的に重視されているが，3節の理論では Type S の観点に立って　現象論＝Langevin Eq. という発想に立つという違いはあるにしても，結局は運動方程式より非線形 Langevin Eq. (3.5) 又は (6.11) を導く理論の一環である。

では，M.S.Green の現象論に random force を付加して得られた (6.11)，(6.12) は (3.5) と全く同一であろうか。

こゝで注意を要するのは，Green の理論は自身明記してある様に発見法的論議に重点が置かれ厳密性には注意されていない事である。Green の理論を射影演算子の方法[30), 31)]を用いて精密化する事は Zwanzig[29)] が行っている。又，彼は memory effect のある場合への拡張も同時に行っている。[29)] しかし，Memory effect については，この様な現象論では必要ないし，[32)] 又理論的にはない[14)] 事に現在ではなっている。残る問題は (6.12) 式の近似が正しいか否かである。この点に関して，Green の演算 (6.6)，(6.7) は現在の厳密な巨視変数の概念[13), 14)]よりみれば問題のある事を指摘するに留めよう。[*)] 即ち，巨視変数 $A(X_t)$ 又はその函数で決まる変数 $\varphi(A(X_t))$ の運動を考えれば非可逆過程が導かれるという考えは概略では正しいが，Emch[13)] の細い議論にある A と $\widetilde{A}$ の区別が行われていない。いかに巨視変数と雖も，その運動 $A(X_t)$ を正確に記述すれば可逆的な又決定論的な運動を行い，決して非可逆性といった確率論的様相は表れない。この様な様相を呈するのは coarse-grained された量 $\widetilde{A}(X_t)$[13)] である。この様な厳密な立場に立てば (6.4)～(6.7) の計算は follow できない。私見であるが，Zwanzig[29)] は Green の論文の精密化に当って，当時の支配的な物理的描像（Langevin Eq.＝運動方程式）に引きづられた点がある様である。

## 7. 結　語

二種の Langevin Eq.（Type S と Type O）という概念によって，Brown 運動の研究の大凡がよく整理される事が分った。Type S は数学的には確率微分方程式で，物理的には巨視的な法則である。Type O は通常の微分方程式で，物理的には運動方程式であるが，多少とも確率論的な描像がもてるのは，確率論的仮定[21), 25)]が自然に持込める様な簡単

---

*) M.S.Green に於る巨視変数概念の不徹底は T.Yamamoto〔Prog. Theor. Phys. 10 (1953), 11〕によっても指摘されている。

な場合又は近似に限られる。

この二種の異なる方程式を最初に混同した張本人はP. Langevin[22]である。又，この混同を踏襲した統計力学者はKirkwood[26] である。現在の水準からみれば混同ではあるが，この二種の方程式の一致した側面（（3.5）式は熱力学的極限に於て，適当な時間領域で，運動方程式と「厳密に」同一である[5]）を指摘した歴史的重要性は測り知れない。

今までLangevin Eq. の立場に立つ統計力学の理論として挙げたものは一論文[5]を除きすべてType O の立場に立つものであった。これらとは必ずしも明かではない関係にあるが，線形の場合にはType S の立場に立つ理論がある。即ち，Onsager-Machlup の理論[33] とOnsager の現象論[34]との関係等に関してHashitsume[35]の導入したLangevin Eq. は丁度Type S になっている。又，van Kampen[36]が master eq. の線形近似として提出したLangevin Eq. はType S で，正しく（3.5）式の線形の場合に対応している。

最近，Zawanzig等[37)〜39)] によって輸送係数の“renormalization”という事が主張されている。尤も，その正確な内容は未だ確定していない。彼らの議論の基礎は（6.11）+（6.12）であるが，その理解の仕方は6節とは少し違う様である。6節では，（6.11）式は，熱力学的極限に於る van Kampen の現象論（3.4）又はそれに伴うLangevin Eq.（3.5）と基本的には同内容で従ってType S と理解した。彼らは（6.11）は正しいが，それに対応する現象式は（6.9）ではなくて“renormalization” と称する何らかの操作が必要であると主張している。この操作はおそらく（2.7）式でLax が行った様なものと考えられる。即ち，Type S とType O を混同しているのではないかという疑問が生じる。尤も，彼らの理論では熱力学的極限の概念[40] が欠落している為，彼らの（6.11）式がType Sかどうかは定かでない。従って，問題は，運動方程式（Type O）よりType S のLangevin Eq.（3.5）を導出する過程に表れる方程式，例えば熱力学的極限をとる前のmemory effect のある表式等，の物理的解釈にあるのかも知れない。しかし，現在広く受容されている統計力学に関する信念[14]『微視的運動法則と巨視的法則（流体力学の法則等で，その一般形は（3.4）式）の中間にはkinetic stage の法則（（3.1）式又は（3.5）式）がある』よりすれば，その様な中間的な表式が妥当する物理的対象があるとは考えられない。

揺動まで含めた完全な巨視的法則は（3.5）式又はその一般形

$$\frac{d}{dt} a_j = \alpha_{1j}(\{a_k\}) + R_j(t) \qquad (7.1)$$

で与えられるとしても，個々の実験の条件では直接この形が得られるとは限らず（7.1）

を『解く』という問題がある。この時，上記，“renormalization”と類似の手続が必要になる。この様な例は，液体ヘリウムの超音波吸収の理論[41]にある。又，直接 Langevin Eq. は取扱っていないが，Bixon と Zwanzig[42]の理論は関係が深い。又，Kawasaki の mode－mode coupling theory[43)〜45)]も素朴には同主旨と理解出来よう。

多くの文献の中には評価を誤ったものや，数学的側面で思わぬ誤解等が残っているかも知れない。読者，諸先輩，諸賢兄の御叱正を期待している。

## 文　　献


1) R.Kubo, Repts. Prog. Phys. 29 (1966), 255.

2) M.Lax, Rev. Mod. Phys. 38 (1966), 541.

3) M.S Green, J.Chem. Phys. 20 (1950), 1281.

4) 湯川編. 岩波講座「現代物理の基礎」第6巻 243頁.

5) H.Ueyama, Prog. Theor. Phys. 47 (1972), 1090.

6) loc. cit. 2) §3.

7) M.C.Wang and G.E.Uhlenbeck, Rev. Mod. Phys. 17 (1945), 90.
尚，“Selected Papers on Noise and Stochastic Processes,” ed. by N.Wax (Dover, 1951) Refs. 8) & 23) と共に収録されている。

8) S.Chandrasekhar, Rev, Mod. Phys. 15 (1943), 1.

9) K.Ito, Mem. Amer. Math. Soc. 4 (1951), 1.

10) J.L.Doob, “Stochastic Processes,” (Wiley, 1953).

11) 寺本　英　「マルコフ過程と力学過程」( 槇書店, 1961).

12) A.Einstein, Ann. Phys. 17 (1905), 549 ; English translation in “Investigations on the Theory of the Brownian Motion,” ed. by R.Furth, (Dover, 1956).

13) G.Emch, Helv. Phys. Acta 37 (1964), 532.

14) N.G.van Kampen, in “Fluctuation Phenomena in Solids,” ed. by R.E.Burgess, (Academic Press, 1965).

15) N.G. van Kampen, Can. J. Phys. 39 (1961), 551.

16) E.Wong and M.Zakai, Ann. Math. Statis. 36 (1961), 551.

17) H.Ueyama, 物性研究 19 (1972), 131, 153 & 269 ; Sci. Repts. (Coll. Gen. Educ. Osaka Univ.) 21 (1973), 1.

18) loc. cit. 2) § 7.

19) R.Kubo, in "Fluctuation, Relaxation and Resonance in Magnetic Systems," (Oliver & Boyd, 1962).

20) R.Kubo and N.Hashitsume, Suppl. Prog. Theor. Phys. 46 (1970), 210.

21) R.Kubo, J. Math. Phys. 4 (1963), 174.

22) P.Langevin, Comptes Rendus 146 (1908), 530.

23) G.E.Uhlenbeck and L.S.Ornstein, Phys. Rev. 36 (1930), 823.

24) S.Chandrasekhar and J. von Neumann, Astrophys. Jour. 97 (1943), 1.

25) S.Chandrasekhar, Astrophys. Jour. 97 (1943), 255 & 263.

26) J.G.Kirkwood, J. Chem. Phys. 14 (1964), 180 ; reprinted in Ref. 27).

27) R.Zwanzig, preface to "Selectes Topics in Statistical Mechanics, John G. Kirkwood," ed. by R.Zwanzig, (Gorden & Breach, 1967).

28) H.Mori, Prog. Theor. Phys. 33 (1965), 423.

29) R.Zawanzig, Phys. Rev. 124 (1961), 983.

30) R.Zwanzig, in "Lectures in Theoretical Physics," ed. by W.E. Brittin et al,(Interscience Pub., 1961) vol. 3.

31) S.Nakajima, Prog. Theor. Phys. 20 (1958), 948.

32) R.Balescu, Physica 27 (1961), 693.

33) L.Onsager and S.Machlup, Phys. Rev. 91 (1953), 1505 & 1512.

34) L.Oasager, Phys. Rev. 37 (1931), 405 ; ibid 38 (1931), 2265.

35) N.Hashitsume, Prog. Theor. Phys. 8 (1952), 461 ; ibid. 15 (1956), 369.

36) N.G. van Kampen, Physica 23 (1957), 707 & 816.

37) R.Zwanzig et al., Phys. Rev. A6 (1972), 2680.

38) R.Zwanzig, in "Proceedings of the Sixth IUPAP Conference on Statistical Mechanics," (Univ. Chicago Press, 1972), p.241.

39) K.S.J.Nordholm, Tech. Note (Univ. Maryland) BN-740 (1972).

40) C.V.Chester, Repts. Prog. Phys. 26 (1963), 411.

41) H.Ueyama, Prog. Theor. Phys. 45 (1971), 25 ; ibid. 46 (1971), 34.

42) M.Bixon and R.Zwanzig, J. Statis. Phys. 3 (1971), 245.

43) K.Kawasaki, Ann. Phys. 61 (1970), 1.

44) K.Kawasaki, loc. cit. 38), p.259.

45) K.Kawasaki, J. Phys. A6 (1973), L1.